

Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

Инженерная математика, 2 семестр

Код, направление подготовки	13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника
Направленность (профиль)	Теплоэнергетика и теплотехника
Форма обучения	Очная
Кафедра-разработчик	Радиоэлектроники и электроэнергетики
Выпускающая кафедра	Радиоэлектроники и электроэнергетики

Типовые задания для контрольной работы:

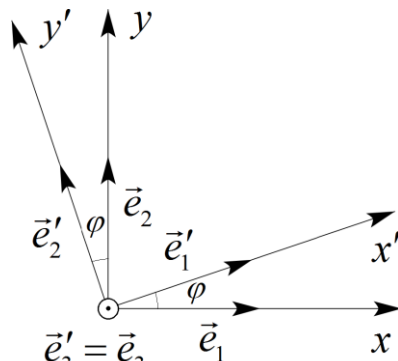
I

(первые) задачи:

1. Определить при каких значениях x и y числа $z_1 = 2 - xi$ и $z_2 = y + 2i$ будут равными.
2. Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$.
3. Возвести в степень комплексные числа $(-2i)^7$, $\left(\frac{i}{2}\right)^8$.
4. Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$.
5. Представить в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$.
6. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$.
7. Представить в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент.
8. Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$
9. Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a + bi$).
10. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$.

II

(вторые) задачи:

1. Найти и изобразить точками на комплексной плоскости все корни $\sqrt[6]{-1-\sqrt{3}i}$. Изобразить пунктиром окружность, на которой эти точки лежат. Построить штрих-пунктиром правильный многоугольник с вершинами в этих точках. Нанести сетку, отобразить оси линиями черного цвета, подписать их. Масштаб по осям сделать одинаковым.
2. Рассчитать напряжённость электрического поля E , создаваемого диполем с дипольным моментом d . Как известно, $E = -\text{grad}\varphi(\vec{r})$, где $\varphi(\vec{r})$ – распределение скалярного потенциала. В случае, когда источником электрического поля является диполь, $\varphi(\vec{r}) = (d, \vec{r})/r^3$. Найдём $\text{grad}\varphi(\vec{r})$.
3. Пользуясь интегральным представлением оператора ∇ , доказать равенство: $\int_V [b, [\nabla, \vec{a}]] dV + \int_V [[\vec{a}, \nabla], b] dV = - \oint_S [[\vec{n}, \vec{a}], b] dS$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ – постоянные векторы, $\vec{n}$ – орт нормали к поверхности.
4. Постройте матрицу поворота системы координат вокруг оси z на угол φ . По определению
$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos(e'_1, e_1) & \cos(e'_1, e_2) & \cos(e'_1, e_3) \\ \cos(e'_2, e_1) & \cos(e'_2, e_2) & \cos(e'_2, e_3) \\ \cos(e'_3, e_1) & \cos(e'_3, e_2) & \cos(e'_3, e_3) \end{vmatrix}.$$
 При повороте вокруг оси z на угол φ (рис.) будет
$$\alpha_z = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Линия без потерь нагружена на емкостное сопротивление, численно равное волновому.
 $f = 100 \text{ МГц}$, $V = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. В конце линии $U_2 = 200 \text{ В}$. Найти $\dot{U}$ на расстоянии 1 м от конца линии.
6. Проверить – лежат ли векторы $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(4; 5; 6)$ и $\vec{c}(7; 8; 9)$ в одной плоскости, т.е. являются ли они компланарными.
7. Для векторов $\vec{a}(1;1;3)$, $\vec{b}(-2;1;2)$, $\vec{c}(2;0;5)$ вычислить смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
8. Для векторов $\vec{a}(1;1;3)$, $\vec{b}(-2;1;2)$, $\vec{c}(2;0;5)$ вычислить векторные произведения:
 1) $\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $\vec{a} \times \vec{c}$; 3) $\vec{c} \times \vec{b}$; 4) $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c})$; 5) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$
9. Пусть даны два вектора $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(2;-1;-1)$ требуется вычислить
 1) $\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$, 2) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \vec{b}$.

10. Вычислить объём пирамиды, если известны координаты её вершин:
 $A(2;1;4), B(1;2;3), C(6;0;2), D(3;3;3); 2) A(2;1;5), B(5;0;3), C(4;0;8), D(6;-2;6)$

.

III

(третьи) задачи:

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа, его модуль, аргумент, найти сопряженное ему число: 1) $(5+4i)(3-2i^3)$; 2) $(1-i)^{13}$.

2. Найти и изобразить точками на комплексной плоскости все корни $\sqrt[6]{-1-\sqrt{3}i}$. Изобразить пунктиром окружность, на которой эти точки лежат. Построить штрих-пунктиром правильный многоугольник с вершинами в этих точках. Нанести сетку, отобразить оси линиями черного цвета, подписать их. Масштаб по осям сделать одинаковым.

3. Три компланарных вектора линейно зависимы. Действительно ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, т.е. $\vec{c} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = \vec{0}$?

4. Множество действительных квадратных матриц 2×2 четырёхмерно, а базисом могут служить четыре элемента этого множества: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определить скалярное произведение таких векторов – матриц 2×2 .

5. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти длины проекций этих векторов друг на друга.

6. Показать, что $((\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} + \vec{a})) = 0$ – уравнение сферы. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, а $\vec{a}$ – постоянный вектор.

7. Доказать тождество Лагранжа: $([\vec{a} \times \vec{n}] \cdot [\vec{c} \times \vec{m}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{c}) & (\vec{a} \cdot \vec{m}) \\ (\vec{n} \cdot \vec{c}) & (\vec{n} \cdot \vec{m}) \end{vmatrix}$.

8. Пусть в некоторой декартовой системе координат известны компоненты тензора

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что сумма $\alpha \cdot A_{ij} + \beta \cdot B_{ij}$ представляет собой компоненты тензора второго ранга, если известно, что A_{ij} и B_{ij} – тензоры второго ранга, а α и β – скаляры.

9. Найти потенциал точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} . В общем случае потенциал $\varphi(\vec{r})$

удовлетворяет уравнению: $\frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -4\pi q \delta(\vec{r})$, где $\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака..

10. Доказать тождество $\text{div}(\varphi \cdot \vec{A}) = \varphi \text{div} \vec{A} + (\vec{A}, \text{grad} \varphi)$, где φ и $\vec{A}$ – соответственно скалярная и векторная функции координат.

IV

(четвёртые) задачи:

1. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{A}$.

а). $\vec{A} = [\vec{a}, \vec{r}]$; б). $\vec{A} = \vec{c} \sin(\vec{k}, \vec{r})$; в). $\vec{A} = \vec{r}(\vec{a}, \vec{r})^n$;

2. Вычислить: а). $\text{grad}(1/r)$; б). $\text{div}(\vec{r}/r)$; в). $\text{rot}(\vec{r}/r)$.

3. Найти напряженность электрического поля $\vec{E}$, если распределение скалярного потенциала φ в пространстве имеет вид: а). $\varphi = -\frac{q}{x}$; б). $\varphi = Ae^{-\alpha x}$; в). $\varphi = -Az^2$.

4. Для тензора II-го ранга в трёхмерном пространстве доказать теорему Остроградского-

Гаусса: $\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint_S T_{ik} dS_i$.

5. Вычислите для поля $\vec{B} = -\nabla \left(\frac{q}{r} \right)$.

а). поток вектора $\vec{B}$ через поверхность сферы единичного радиуса

б). интеграл по объёму сферы от $\text{div} \vec{B}$

произвести прямое доказательство теоремы Остроградского-Гаусса.

6. Для тензора II-го ранга в трёхмерном пространстве доказать теорему Остроградского-Гаусса: $\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint_S T_{ik} dS_i$. (исходить из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора $\vec{A}_i = T_{ik} \vec{d}_k$, где $\vec{d} = \text{постоянный вектор.}$)
7. Доказать тождество $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} = \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{A}, \vec{\nabla}) \vec{B}$, где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – векторные функции координат.

8. Найти матрицу $C=3A-2B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Найти изображение периодического импульса с периодом 2τ

$$f(t) = \begin{cases} h - \frac{h}{\tau}t & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{h}{\tau}(t - \tau) & \tau < t < 2\tau \end{cases}$$

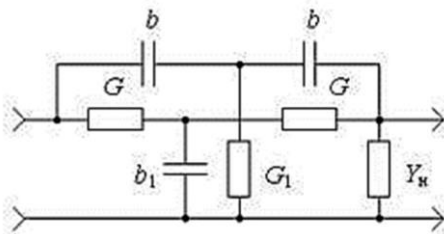
10. Найдём изображения по Лапласу тригонометрических и гиперболических синуса и косинуса.

$$e^t \sim \frac{1}{p-1}, \quad e^{-t} \sim \frac{1}{p+1}, \quad e^{it} \sim \frac{1}{p-i}, \quad e^{-it} \sim \frac{1}{p+i}$$

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) = \frac{p}{p^2-1}, \quad \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p^2-1}$$

V (пятыe) задачи:

1. Найти вычеты функции $\frac{1}{z^2+1}$ во всех особых точках конечной плоскости. У функции два полюса первого порядка $z=i, z=-i$.
2. Записать в алгебраической и показательной формах выражение для полного комплексного сопротивления индуктивной катушки с параметрами $R_K=3 \text{ Ом}$; $L_K=0,0127 \text{ Гн}$, $f=50 \text{ Гц}$.
3. Найти параметры и передаточную функцию схемы двойного Т-образного моста, нагруженного на Y_H .



4. Линия без потерь длиной $l = \lambda/10$ разомкнута на конце. $Z_C = 200 \text{ Ом}$, в начале линии $U_1 = 200 \text{ В}$. Найти $\vec{I}$ в середине линии.
5. Рассмотреть падение волны напряжения, возникшей при коммутации в схеме предыдущей задачи, на резистор $R_H = 100 \text{ Ом}$ и определить обратные волны тока и напряжения, образующиеся при этом падении.

6. Показать, что векторное поле $\vec{F}$ является потенциальным и найти его потенциал $\vec{F}(x, y, z) = (3x + yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$.

7. Определить активную, реактивную и полную мощности, если мгновенные значения тока и напряжения заданы уравнениями:

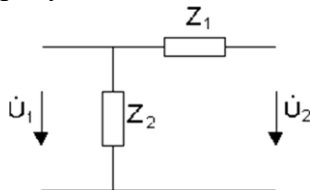
$$u = 141 \sin(314t + 60^\circ), \text{ В}; \quad i = 7,07 \sin(314t + 30^\circ), \text{ А}$$

8. Заданы графики изменения $u(t)$ и $i(t)$ (с амплитудами $U_m = 141 \text{ В}$; $I_m = 2,82 \text{ А}$ для участка электрической цепи. Записать функции в тригонометрической и комплексной формах, если $f = 50 \text{ Гц}$. Определить полное сопротивление и угол сдвига фаз. Построить схему замещения цепи.

9. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

10. Определить A -параметры четырехполюсника схема которого представлена на рисунке.



Типовые вопросы к экзамену

1. Комплексные величины. Функции комплексной переменной. Понятие комплексного числа. Действительная и мнимая часть комплексного числа. Мнимая единица. Степень комплексного числа. Комплекс плоскость.
2. Сопряженные комплексные числа. Корень из комплексного числа и единицы. Операции с комплексными числами. Аналитическая функция. Криволинейный интеграл от функции комплексной переменной.
3. Теорема Коши. Ряд Тейлора, Лорана. Теорема о вычетах. Эквивалентный контур. Теорема о числе полюсов и нулей. Конформные отображения. Теорема Шварца-Кристоффеля.
4. Применение комплексных величин при расчете электрических цепей в синусоидальном режиме. Графическое изображение синусоидальной функции. Представление электрических величин с помощью комплексных чисел.
5. Комплексное полное сопротивление при последовательном и параллельном соединении. Метод комплексных амплитуд. Обобщение понятия комплексного полного сопротивления (импеданс).
6. Правила Кирхгофа и законы Ома в комплексной форме. Комплексный вектор. Векторная диаграмма для токов и напряжений в электрической цепи с комплексными величинами. Баланс мощностей.
7. Ряд Фурье. Интеграл Фурье. Разложение в ряд по ортогональным функциям. Метод Даламбера и метод Фурье. Разложение в ряд Фурье. Ряды с комплексными числами.
8. Графическое представление спектра частот. Распространение ряда Фурье на периодические функции. Вещественная форма интеграла Фурье.
9. Комплексная форма интеграла Фурье. Ряды с комплексными членами. Применение рядов к электрическим цепям. Преобразование Фурье, применение к электрическим цепям. Изучение диаграмм направленности
10. Скалярные и векторные величины. Ось и направление вращения вектора. Положительное направление трех векторов a , b , c . Угол между двумя векторами a и b .
11. Операции над векторами. Произведение вектора на скаляр. Сложение и вычитание векторов. Скалярное и векторное произведение. Смешанное произведение трех векторов.
12. Дифференциальные операции с векторами. Функции точек. Векторные интегралы. Приложения векторного исчисления к теории электромагнитного поля.
13. Силовые линии тока. Градиент сложной скалярной функции. Дивергенция и вихрь (ротор). Оператор Лапласа и Гамильтона. Общий случай векторного поля.
14. Электростатическое поле. Магнитное поле постоянных токов. Электромагнитное поле. Закон Фарадея. Закон Ампера.
15. Циркуляция и поток вектора. Теорема Остроградского-Гаусса. Уравнения Максвелла. Векторный потенциал магнитного поля, возбужденного током.
16. Системы ортогональных криволинейных координат в пространстве. Система цилиндрических и сферических координат. Система параболических и эллипсоидальных координат вращения.
17. Приложения к уравнениям Максвелла для электромагнитных колебаний и волн. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах.
18. Применение тензорного исчисления к исследованию электрических цепей. Тензорная алгебра. Тензорная плотность и тензорная емкость. Матричная форма формул преобразования координат.
19. Методы интегрирования дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
20. Уравнение Бернулли и Лагранжа. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Уравнение Эйлера.
21. Интегрирование при помощи степенных рядов. Уравнения с частными производными. Частный интеграл неоднородного уравнения. Уравнение Лапласа и Пуассона.
22. Законы Ома в дифференциальной и интегральной форме. Закон Джоуля-Ленца, работа, электрическая энергия и мощность. Электромагнитные колебания в прямоугольной

полости.

23. Применение специальных функций для расчётов в электротехнике и радиоэлектронике. Приложение гиперболических функций к расчёту длинных линий. Представление гамма-функции через интеграл Коши.

24. Теория вероятностей и законы распределения случайных величин. Случайная величина. Независимые события. Теорема умножения вероятностей. Несовместные события.